METODE DE INTERPOLARE POLINOMIALĂ

1.1. Polinoame de interpolare

Considerăm funcţia reală f, definită pe intervalul real $[a, b]$, căreia i se cunosc valorile în punctele distincte $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$. Aceste puncte le vom numi noduri.

Definiţia 1.1. Se numeşte polinom de interpolare al funcţiei f pe nodurile $x_1, x_2, ..., x_n$, un polinom p cu proprietăţile:

$$\textbf{(1.1)} \quad \begin{cases} gr(p) \le n-1 \\ p(x_i) = f(x_i), 1 \le i \le n \end{cases}$$

Teorema 1.1. Polinomul de interpolare al funcţiei f, pe nodurile $x_1, x_2, ..., x_n$ există şi este unic.

Demonstraţie. Deoarece $gr(p) \le n-1$ rezultă că polinomul p are forma algebrică:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}$$

Condiţiile $p(x_i) = f(x_i)$, $1 \le i \le n$, determină un sistem liniar neomogen, de n ecuaţii cu n necunoscute $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$. Determinantul acestui sistem este:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Deoarece nodurile sunt distincte rezultă $D \neq 0$.

În consecinţă coeficienţii $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sunt unic determinanţi.

Teorema este demonstrată.

Sistemul:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_k + \dots + a_{n-1} x_k^{n-1} = f(x_k),\ 1 \le k \le n, \\ a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = p(x) \end{cases}$$

poate fi scris astfel:

$$\textbf{(1.2)}\quad \begin{cases} a_0 + a_1 x_k + \dots + a_{n-1} x_k^{n-1} + a_n f(x_k) = 0,\ 1 \le k \le n, \\ a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n p(x) = 0 \end{cases}$$

unde $a_n = -1$.

Sistemul **(1.2)** poate fi considerat ca un sistem liniar omogen de n+1 ecuaţii cu n+1 necunoscute $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Deoarece soluţia sa nu este identic nulă ($a_n \neq 0$), rezultă că determinantul său este nul, adică:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & p(x) \end{vmatrix} = 0$$

Această egalitate este echivalentă cu:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & 0 \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & p(x) \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă de aici următoarea formulă pentru polinomul de interpolare:

$$\textbf{(1.3)} \qquad p(x) = -\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Exemplul 1.1. Fie funcţia *f* cu proprietăţile: $f(0)=5$, $f(2)=3$, $f(1)=9$.

Pentru n=3 polinomul *p* , din formula precedentă, este de forma :

$$p(x) = -\frac{1}{\prod\limits_{1 \le i < j \le 3} (x_j - x_i)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & x_3^2 & f(x_3) \\ 1 & x & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Rezultă:

$$p(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & x & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Deci:

$$p_3(x) = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ x & x^2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[36x + 3x^2 - 3x - 18x^2 - 5 \left(x^2 + 2 + 4x - 4 - x \right.\right.$$

În final avem: $p_3(x) = -5x^2 + 9x + 5$

Prof. Antonie Cristian