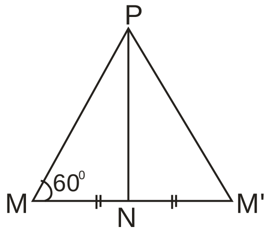
Rezolvarea problemelor de geometrie plană utilizând simetria faţă de un punct. Exemple .

Prof. Bălan Gabriel

1. În triunghiul PMN, m($\hat{M}$) = 60^0, PM = 2 · MN. Demonstraţi că m(¬PNM) = 90^0.

Ideea. Construim simetricul lui M faţă de N. Fie acesta M’.



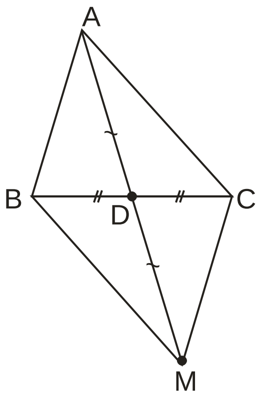
$$\left.\begin{array}{l} MM' = 2MN = PM \\ m(\hat{B}) = 60^0 \end{array}\right\} \varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta PMM' \text{ este echilateral} \\ (PN) \text{ este mediana} \end{array}\right\}$$ ε PN ζ MM’ ε

m(¬PNM) = 90^0.

2. În triunghiul ABC, (AD) este mediană şi (AD este bisectoare, D ‽ (BC). Demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.

Ideea. Se construieşte simetricul lui A faţă de D pentru a se obţine triunghiuri congruente. Fie M acest punct.



⊇ABD η ⊇MDC (LUL) ε

(AB) η (MC) (1)

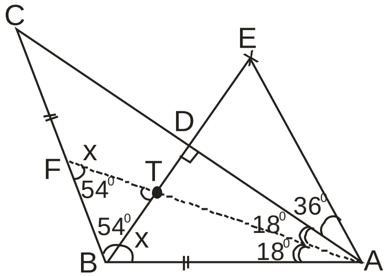
şi m(¬BAM) η m(¬DMC);

dar m(¬BAM) η m(¬DAC) ε m(¬DAC) η m(¬DMC) ε ⊇ACM isoscel cu baza AM ε (AC) η (MC) (2);

(1) + (2) ε (AB) η (AC).

3. Fie ABC un triunghi isoscel cu m($\hat{B}$) = 108^0 şi [AB] η [BC]. Considerăm BD înălţimea dusă din B. D ⁉ [AC], iar [AF bisectoarea interioară a unghiului A, F ⁉ [BC]. Dovediţi că AF = 2BD.

Judeţeană, Dolj, 1996



Prelungim pe (BD) cu un segment congruent cu el pentru a obţine segmentul 2BD. Prelungim cu (DE) η (BD) ε BE = 2BD. Fie (AF) 3 (BE) = {T}. ⊇ABC: 108^0 + 2 · m($\hat{A}$) = 180^0 ε m($\hat{A}$) = 36^0; ⊇FBA: 18^0 + 108^0 + m(¬BFA) = 180^0 ε m(¬BFA) = 54^0; ⊇DAT: 90^0 + 18^0 + m(¬DTA) = 180^0 ε m(¬DTA) = 72^0 = m(¬FTB); ⊇BFT: 54^0 + 72^0 + m(¬FBT) = 180^0 ε m(¬TBF) = 54^0 ε ⊇TBF isoscel ε TB = TF = x (1);

TD _ (BD) şi notăm TD = y; AF = AT + TF = AT + x; BE = BT + TE = x + TE ε AT = TE. Calculez unghiurile ⊇TAE pentru a vedea dacă este isoscel; m(¬ETA) = 72^0;

⊇ABE: $\left.\begin{array}{l}(AD)\text{ înaltime}\\(AD)\text{ mediană}\end{array}\right\}$ ε ⊇BAE isoscel ((AB) η (AE)) ε (AD bisectoare ε m(¬BAD) = m(¬EAD) = 36^0;

m(¬TAE) = 18^0 + 36^0 = 54^0 ε m(¬TEA) = 180^0 – (54^0 + 72^0) = 54^0 ε $\hat{A} \equiv \hat{E}$ ε TA = TE (2);

Din (1) + (2) ε AF = BE = 2BD.

Ideea. Pentru a realiza segmentul sumă 2BD, construim simetricul lui B faţă de D.