METODE DE CALCUL A INTEGRALELOR DEFINITE

Prof. Antonie Cristian Daniel

1.Teoremă (Formula de integrare prin părţi)

Dacă $f, g: [a, b] \to R$ sunt două funcţii derivabile , cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

<u>Demonstraţie:</u>

Din $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), x \in [a, b]$ rezultă că funcţia $f \cdot g$ este primitivă a funcţiei $f' \cdot g + f \cdot g'$ conform formulei lui Leibniz-Newton avem:

$\int_a^b (f \cdot g)' dx = (f \cdot g)(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

adică

$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f \cdot g)(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

2.Teoremă (prima metodă de schimbare de variabilă)

Fie $[a, b] \xrightarrow{u} I \xrightarrow{f} R$ (I interval din R) două funcţii cu proprietăţiile :

1) f este continuă pe I
2) u este derivabilă , cu derivata continuă pe [a,b]

Atunci $\int_a^b f(u)x)) \cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

<u>Demonstraţie:</u>

Fie $F: I \to R$ o primitivă a lui f pe I.(F există pentru că f este continuă pe I). Atunci din formula lui Leibniz-Newton, membrul drept al egalităţii devine

$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = F(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F\big(u(a)\big) - F(u(b))$ (1)

Pe de altă parte să observăm că are loc

$(F \circ u)'(x) = F'\big(u(x)\big) \cdot u'(x) = f\big(u(x)\big) \cdot u'(x)$ ceea ce arată că $F \circ u$ este o primitivă pentru funcţia $(F \circ u) \cdot u'$. Aplicând din nou, formula lui Leibniz – Newton avem:

$\int_a^b f\big(u(x)\big) \cdot u'(x)dx = (F \circ u)(x)\Big|_a^b = F\big(u(b)\big) - F\big(u(a)\big)$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea din enunţul teoremei .

3.Observaţie

Procedeul practic de aplicarea a metodei constă în următorii paşi:

- Exprimarea integrandului sub forma $f\big(u(x)\big) \cdot u'(x)$
- Notaţia $t = u(x)$, de aici $dt = u'(x)dt$
- Schimbarea limitelor de integrare
- Calculul integralei $\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

4.Teoremă (a doua metodă de schimbare de variabilă)

Dacă $[c,d] \xrightarrow{u} [a,b] \xrightarrow{f} R$ sunt două funcţii cu proprietăţile

1) f este continuă pe [a,b]
2) u bijectivă, u, u^{-1} derivabile cu derivate continue şi $u'(t) \neq 0, \forall t \in [c,0]$,

Atunci $\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\big(u(t)\big)u'(t)dt$.

<u>Demonstraţie:</u>

Cum f este continuă, această funcţie admite primitive.Fie $F:[a,b] \to R$ o astfel de primitivă.

Avem:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (1)

Cum $(F \circ u)'(t) = F'\big(u(t)\big) \cdot u'(t) = f\big(u(t)\big) \cdot u'(t)$ rezultă că $F \circ u$ este o primitivă pentru funcţia (f $\circ$ u) $\cdot$ u' .

Deci

$\int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\big(u(t)\big)u'(t)dt = (F \circ u)(t)\Big|_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} = F(b) - F(a)$

(2)

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea din teoremă.

5.Observaţii

3.6.5.1.Din $u'(t) \neq 0, t \in [c,0]$ se deduce că u este strict monotonă pe [c,d]