# TEORIA FUNCŢIILOR

**Prof. Mihai Cristina**

**Liceul Tehnologic "Petrache Poenaru", Bălcești, Vâlcea**

## *1.Imaginea unei mulţimi printr-o funcţie*

**Definiţie**: Fie $f: E \to F$ si $A \subseteq E.$ Numim imaginea prin f a mulţimii A mulţimea:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq F$$

Dacă A = E mulţimea f(E) se va numi mulţimea efectivă de valori a funcţiei f.

**Exemplu:** Fie funcţia
$f: \Re - \{0\} \to \Re,\ f(x) = x + 1/x$. Sa aratam ca $f(\Re - \{0\}) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

Vom arata această egalitate de mulţimi prin dublă incluziune.

Fie $y \in f(\Re - \{0\}), y = x + 1/x$ cu $x \in \Re - \{0\}$

Dacă $x > 0$, atunci $x + 1/x - 2 = (x^2 + 1 - 2x)/x = (x-1)^2/x > 0$ cu egalitatea pentru $x = 1$

Dacă $x < 0$, atunci $x + 1/x + 2 = (x^2 + 1 + 2x)/x = (x+1)^2/x < 0$ cu egalitatea pentru $x = -1$

Deducem că $y \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, adica $f(\Re - \{0\}) \subset (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

Fie acum $y \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, adica $|y| > 2$

Să aratăm că $\exists x \in \Re - \{0\}$ astfel incat $y = x + 1/x \Leftrightarrow x^2 + 1 = yx \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$

Cum $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$, deducem existenta unui x cu proprietatea ceruta ,

Deci $(-\infty, -2] \cup [2, \infty) \subset f(\Re - \{0\})$

**Teoremă:** Fie $f: E \to F$, iar $A, B \subseteq E.$ Sunt adevarate următoarele afirmaţii:

1) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

*Demonstraţie:*

1)Evidentă.

2)Fie $y \in f(A \cup B)$; atunci $(\exists)\, x \in A \cup B$, astfel incat $y = f(x)$. După cum $x \in A$ sau $x \in B$, deducem ca $f(x) \in f(A)$ sau $f(x) \in f(B)$, adica $y \in f(A) \cup f(B)$. Deci $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

Cum $A \subseteq A \cup B$ si $B \subseteq A \cup B$, conform cu 1) $f(A) \subseteq f(A \cup B)$ si $f(B) \subseteq f(A \cup B)$, de unde rezultă că $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

3) Cum $A \cap B \subseteq A$ si $A \cap B \subseteq B$, conform cu 1), deducem ca $f(A \cap B) \subseteq f(A)$ si $f(A \cap B) \subseteq f(B)$

de unde rezultă că $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

## *2.Compunerea funcţiilor*

Fie $f : E \to F$, si $g : G \to H$ două funcţii pentru care $f(E) \subset G$.

**Vom defini** o altă funcţie $h : E \to H$, in felul următor: $\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$

Funcţia h definită mai sus poartă numele de compusa funcţiei g cu f şi va fi notată $h = g \circ f$

Pentru o mulţime oarecare E vom nota $1_E : E \to E$, funcţia definită astfel : $\forall x \in E$, avem $1_E(x) = x$

**Teoremă** : Fie $f : E \to F$, $g : G \to H, h : I \to J$ pentru care $f(E) \subset G, g(G) \subset I$. Atunci

1) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

2) $1_F \circ f = f, f \circ 1_E = f$

## *3.Funcţii injective*

**Definiţie:** Fie $f : E \to F$ o funcţie oarecare. Vom spune ca f este injectivă dacă $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow$ $f(x) \neq f(y)$

**Teoremă** Fie $f : E \to F$ . Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1)f este injectivă;

2) dacă pentru $\forall x, y \in E$ avem $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

3) $\forall A, B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

*Demonstraţie:*

1) $\Rightarrow$ 2) Fie x,y $\in$ E astfel încât f(x)= f(y). Dacă prin absurd $x \neq y$ ,cum f este injectivă ar rezulta $f(x) \neq f(y)$ ceea ce este contradictoriu. Analog deducem că 2) $\Rightarrow$ 1)

2) $\Rightarrow$ 3) conform teoremei anterioare $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Să demonstrăm că $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

Fie $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ si $y \in f(B)$.Deci $(\exists) x \in A, z \in B$ astfel incat $y = f(x) = f(z)$ , adică x = z. Cum $x \in A, z \in B$ si x = z. deducem ca $x \in A \cap B$ şi deci $y = f(x) \in f(A \cap B)$, adică $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$

3) $\Rightarrow$ 2) Fie x, y $\in$ E astfel încat f(x)= f(y) si A ={x}, B={y}. Conform cu 3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

$\Leftrightarrow$ $f(A \cap B)$={f(x)}, adică A = B = {x}, deci {x} = {y}. adică x = y.

**Teoremă** Fie $f : E \to F$ o funcţie oarecare. Atunci f este injectivă dacă şi numai dacă $\exists g : F \to E$ astfel încat $g \circ f = 1_E$

**Observaţie**: Dacă compunem două funcţii injective obţinem tot o funcţie injectivă.

## *4. Functii surjective*

**Definiţie**: O funcţie $f : E \to F$ se numeşte surjectivă dacă: $(\forall) y \in F, (\exists) x \in E$ astfel încât f( x )= y.

**Observaţie**: O funcţie f este surjectivă dacă şi numai dacă f( E ) = F.

**Teoremă**: Fie $f : E \to F$ o funcţie oarecare. Atunci f este surjectivă dacă şi numai dacă $(\exists) g : F \to E$ astfel încât $f \circ g = 1_F$ .

<u>*Demonstraţie*</u>:

$\Rightarrow$: Fie $y \in F$ , atunci $(\exists) x \in E$ astfel încât f( x ) = y. Dintre aceşti x alegem unul $x_y$ Definim g( y ) = $x_y$ se verifică imediat că $f \circ g = 1_F$ .

$\Leftarrow$: Fie $y \in F$ ; atunci f( g(y)) = y şi dacă notăm cu x = g( y ) avem că f( x ) = y, adică f este surjectivă.

**Observaţie:** Dacă compunem două funcţii surjective, obţinem tot o funcţie surjectivă.

## *5. Funcţii bijective*

**Definiţie:** O funcţie $f : E \to F$ se numeşte bijectivă dacă ea este simultan injectivă şi surjectivă.

**Observaţie:** O funcţie $f : E \to F$ este bijectivă dacă şi numai dacă pentru orice $y \in F$ , există câte un singur $x \in E$ astfel încât y = f( x ); funcţia $g : F \to E$ definită prin g( y ) = x poartă numele de inversa funcţiei f şi se notează g = $f^{-1}$.

Deci , dacă $f: E \rightarrow F$ este bijectivă , atunci avem o funcţie $f^{-1}: F \rightarrow E$ definită astfel:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y(x \in E, y \in F).$$

Se verifică imediat că $f^{-1} \circ f = 1_E$ si $f \circ f^{-1} = 1_F$.

O funcţie $f: E \rightarrow F$ este bijectivă $\Leftrightarrow \exists g: F \rightarrow E$, astfel încât $g \circ f = 1_E$ si $f \circ g = 1_F$.

**Teoremă** : Fie $f: A \rightarrow B$ si $g: B \rightarrow C$ două funcţii bijective. Atunci $g \circ f: A \rightarrow C$ este bijectivă şi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

*<u>Demonstraţie:</u>*

Faptul că $g \circ f$ este bijectivă rezultă din faptul că dacă compunem două funcţii bijective obţinem tot o funcţie bijectivă.

Fie $h = f^{-1} \circ g^{-1}$; avem

$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = f \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ 1_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = 1_C$,

iar $h \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ 1_E \circ f = f^{-1} \circ f = 1_A$

## *6. Funcţii pare*

**Definiţie** : Fie $a \in \Re, a > 0$. O funcţie $f: [-a, a] \rightarrow \Re$ se numeşte pară dacă f(-x )=f( x), $\forall x \in [-a, a]$.

**Exemple** : Funcţia $\cos: \Re \rightarrow [-1,1]$ este o funcţie pară.

Funcţia $f: \Re \rightarrow \Re, f(x) = x^{2k}, (k \in N)$ este pară.

**Observaţie:** Un produs finit de funcţii pare este o funţie pară ; o sumă finită de funcţii pare este o funcţie pară . Dacă compunem două funcţii pare obţinem tot o funcţie pară.

## *7. Funcţii impare*

**Definiţie**: Fie $a \in \Re, a > 0$.O funcţie $f: [-a, a] \rightarrow \Re$ se numeşte impară dacă f(-x)= - f(x) , $\forall x \in [-a, a]$

**Exemple:** $\sin: \Re \rightarrow [-1,1]$ este o funcţie impară;

Funcţia $f: \Re \rightarrow \Re, f(x) = x^{2k+1}, (k \in N)$ este impară.

**Observaţie:** Un produs par de funcţii impare este o funcţie pară, iar un produs impar de funcţii impare este o funcţie impară. O suma finită de funcţii impare este o functie impară. Dacă compunem două funcţii impare obţinem tot o funcţie impară.

**Teoremă:** Fie $f:\Re\rightarrow\Re$ o funcţie impară si bijectivă. Atunci funcţia $f^{-1}:\Re\rightarrow\Re$ este impară.

*Demonstraţie:*

Fie $y\in\Re$ ; să demonstrăm ca $f^{-1}(y)=-f^{-1}(y)$ . Avem :
$f(f^{-1}(-y))=-y,$ iar $f(-f^{-1}(y))=-f(f^{-1}(y))=-y,$ adica $f(f^{-1}(-y))=f(-f^{-1}(y))$ si deci $f^{-1}(-y)=-f^{-1}(y)$ .

## 8. *Funcţii periodice*

**Definiţie:** O funcţie $f:\Re\rightarrow\Re$ este periodică dacă există un număr T$\neq 0$ pentru care f( x + T) = f(x), $(\forall)x\in R$ .

Un astfel de număr T poartă numele de perioadă a functiei f. Cea mai mica perioadă strict pozitivă a funcţiei f, dacă există, poartă numele de perioadă principală a funcţiei f.

**Exemple**: Funcţiile trigonometrice sunt funcţii periodice ( funcţiile sinus si cosinus au perioadă principală $2\pi$ , iar funcţiile tangenta si cotangenta au perioadă principală $\pi$ ).

**Observaţii:** Dacă T este perioadă pentru f atunci –T este perioadă pentru f.

Dacă T este perioadă pentru f atunci kT este perioadă pentru f , $(k\in Z)$

Dacă g este o funcţie periodică , iar f este o funcţie oarecare atunci $g\circ f$ este o funcţie periodică, în particular dacă compunem două funcţii periodice obţinem tot o funcţie periodică .

## 9. *Probleme*

**1.** Fie $f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C$ două funcţii. Arătaţi că:

i) Dacă $g\circ f$ este injectivă pe A, atunci f este injectivă pe A.

ii) Dacă $g\circ f$ este surjectivă pe A, atunci g este surjectivă pe B.

*Soluţie.*

i) Fie $x_1, x_2\in A,$ astfel incat f( $x_1$ ) = f( $x_2$ ); atunci g(f( $x_1$ )) = g(f( $x_2$ )) $\Rightarrow (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)$ ( $x_2$ ) $\Rightarrow x_1 = x_2$

ii) Fie $y\in C$ , cum $g\circ f$ este surjectivă $\exists x\in A$ astfel încât ( $g\circ f$ )(x) = y $\Rightarrow$g(f(x)) = y$\Rightarrow$ g surjectivă.

**2**. Fie $f, g : A \to B$ două funcţii oarecare, iar $h : B \to C$ o funcţie bijectivă. Arătaţi că dacă $h \circ f = h \circ g$ atunci f=g.

*Soluţie.*

Cum h este bijectivă $\Rightarrow \exists h^{-1} : C \to B. \text{Din } h \circ f = h \circ g \Rightarrow h^{-1} \circ (h \circ f) = h^{-1} \circ (h \circ g) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (h^{-1} \circ h) \circ f = (h^{-1} \circ h) \circ g \Rightarrow 1_B \circ f = 1_B \circ g \Rightarrow f = g.$$

**3.** Fie $f : \Re \to \Re$ , iar $f_1, f_2 : \Re \to \Re, f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$. Arătaţi că atunci $f_1$ este pară, iar $f_2$ este impară si f = $f_1$+ $f_2$ .

*Soluţie.*Avem $f_1(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = f(x), \text{iar } f_2(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -f(x)$ .

**4.** Fie $f : \Re \to \Re$ o funcţie periodică şi monotonă. Atunci arătaţi că f este constantă.

*Soluţie.*

Cum f este periodică $\exists T > 0 \text{ astfel incat } f(x+T) = f(x).(\forall)x \in R$. Să presupunem că f este monoton crescatoare. Atunci $f(0) \le f(x) \le f(T), (\forall) x \in [0, T]$. Cum f(0) = f( T ) deducem f( x )= f( T ), $(\forall) x \in [0, T]$ adică f este constantă pe [0, T] deci şi pe R.