PROBLEME DE GEOMETRIE

Pentru testarea naţională cls. A VIII -a

1. Fie ΔABC, $m(\measuredangle A) = 90°$, D mijlocul lui [BC], E simetricul lui B faţă de AD. Să se arate că:
a) $EC \parallel AD$;
b) A, B, C, E sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil.

2. Se consideră triunghiul ABC şi fie D proiecţia lui A pe BC. Perpendiculara în A pe AB intersectează pe BC în E. Dacă AB = 13, BC = 21 şi AD = 12, să se afle perimetrul triunghiului ACE.

3. Se consideră triunghiul ABC cu AB = AC, $AD \perp AB$, $D \in (BC)$. Să se afle $\frac{CD}{BD}$, ştiind că BC = 32 cm şi distanţa de la A la dreapta BC este 12 cm.

4. Aria unui dreptunghi este de 150 cm^2. Dacă acest dreptunghi se acoperă cu pătrate egale, având latura egală cu un număr natural, să se afle perimetrul dreptunghiului.

5. Fie rombul ABCD, $F \in (BC)$, $DF \cap AB = \{E\}$, M mijlocul lui [DF], G mijlocul lui [EF]. Să se arate că:
a) $\Delta BEG \sim \Delta CDM$;
b) $CD \cdot BG = CM \cdot BE$.

6. Se consideră pătratul ABCD, cu AB = 4 cm şi $E \in (AD)$ astfel ca AE = 1 cm. Să se afle distanţa de la B la CE.

7. Să se calculeze apotema şi lungimea laturii unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de rază 1 cm, pentru n = 3, 4, 6, 8.

8. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi isoscel ABC în care AB = AC = 20 cm, BC = 24 cm.

9. Paralelogramul ABCD are AB = 6 cm, AC = 7 cm şi d(D,AC) = 2 cm. Să se afle d(D,AB).

10. Diagonala [BD] a paralelogramului ABCD se împarte prin punctele M, N în trei părţi congruente. Să se arate că AMCN este paralelogram. Să se afle aria sa, ştiind că aria $\boldsymbol{A}_{(ABCD)}$ este 12 cm^2.

11. Se dă triunghiul (ABC) cu AB = 20 cm, BC = 30 cm, [BD bisectoarea unghiului B, $D \in (AC)$, dreapta $DE \parallel AB$, $E \in (BC)$ şi dreapta $FE \parallel DB$, $F \in (AC)$. Să se determine AC, dacă AD–FC = 1 cm.

12. Pe planul paralelogramului ABCD, cu AB = 2a, AD = a şi $m(\angle BAD) = 60°$, se ridică perpendiculara AE, AE = a. Să se calculeze distanţele de la punctul E la dreptele BC şi CD.

13. Fie O, A, B, C patru puncte necoplanare astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$. Se notează OA = a, OB = b, OC = c.
a) Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC în funcţie de a, b, c.
b) Să se calculeze $\boldsymbol{A}_{ABC}$.
c) Să se calculeze OH (H este proiecţia lui O pe planul ABC).

14. Un paralelipiped dreptunghic are diagonala $5\sqrt{38}$ cm şi dimensiunile direct proporţionale cu 2, 3, 5.
a) Să se calculeze dimensiunile.
b) Să se calculeze aria totală şi volumul.

15. Un cub omogen are muchia de 2 dm şi cântăreşte 560 grame. Din acest cub se taie un cub cu muchia de 1 dm. Cât cântăreşte acest cub?

16. Se consideră ABCD tetraedru regulat de muchie $2\sqrt{3}$ cm,
a) Să se calculeze volumul tetraedrului.
b) Să se demonstreze că dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

17. Se consideră triunghiul echilateral ABC, cu AB = 3 cm şi AM $\perp$ (ABC), AM = $\sqrt{6}$ cm. Pe laturile [AB] şi [AC] se fixează punctele E şi F, astfel încât AE = 2·BE şi CF = 2·AF.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului AEF.

b) Să se demonstreze că planele (EFM) şi (AFM) sunt perpendiculare.

18. Se consideră trapezul ABCD cu m($\angle$A) = m($\angle$D) = 90°, AB = 4 cm, AD = 8 cm, DC = 10 cm. Fie BP $\perp$ (ABC), BP = 3 cm.

a) Să se calculeze perimetrul trapezului ABCD.

b) Să se calculeze volumul piramidei PABCD.

19. Se consideră piramida VABCD, în care baza ABCD este un romb de latură *a* cm, m($\angle$BAD) = m($\angle$BVD) = 60°.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului BVD.

b) Să se calculeze volumul piramidei VABCD.

20. Se consideră piramida patrulateră regulată VABCD, cu AB = 6 cm, VO = $6\sqrt{2}$ cm, iar O este centrul bazei.

a) Să se calculeze aria totală a piramidei.

b) Se fixează punctul P pe [VO] astfel încât [PV] ≡ [PA]. Să se calculeze lungimea segmentului [PO].

21. Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D', în care diagonala este de lungime 13 cm, iar suma lungimilor tuturor muchiilor este de 76 cm.

a) Să se calculeze aria totală a paralelipipedului.

b) Dacă lungimile AB, BC şi AA' sunt respectiv proporţionale cu 6, 8 şi 21, să se determine distanţa de la B' la AD'.

22. Se dă prisma dreaptă ABCDA'B'C'D', cu ABCD pătrat de latură a, iar muchia laterală [AA'] este de lungime 2a. Fie E mijlocul muchiei [CC'].

a) Să se calculeze aria totală a prismei.

b) Să se demonstreze că triunghiul A'EB este dreptunghic.

23. Se dă piramida patrulateră regulată SABCD, cu baza ABCD şi O centrul bazei, AB = 2 m, iar SA = $\sqrt{6}$ m.

a) Să se calculeze volumul piramidei.

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

24. Se dă tetraedrul regulat ABCD de muchie 6 cm şi O punctul de intersecţie a mediatoarelor triunghiului BCD.

a) Să se calculeze volumul tetraedrului.

b) Se fixează punctul H pe segmentul [AO], situat la egală distanţă de toate feţele tetraedrului. Să se determine distanţa dintre punctele H şi A.

25. Se consideră un tetraedru regulat de muchie a.

a) Să se calculeze aria totală a tetraedrului.

b) Să se calculeze cosinusul unghiului format de două feţe ale tetraedrului.

c) Să se demonstreze că suma distanţelor de la un punct interior tetraedrului la cele patru feţe ale lui este constantă.

26. Secţiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel VAB cu m($\angle$AVB) = 120° şi VA = VB = 6 cm.

a) Să se calculeze raza conului.

b) Să se calculeze volumul conului.

c) Fie M şi N două puncte situate pe [AV] astfel încăt VM = MN = NA = 2 cm şi două plane paralele cu baza conului duse prin M şi N. Calculaţi raportul volumelor trunchiurilor de con care au generatoarele egale cu [MN], respectiv [NA].

27. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de lungimi egale cu 6cm, respectiv 10 cm şi volumul egal cu 196 cm^3. Să se calculeze:

a) înălţimea trunchiului de piramidă;

b) aria laterală a trunchiului;

c) sinusul unghiului format de planele a două feţe laterale opuse.

28. Fie tetraedrul SABC, cu SA, SB, SC perpendiculare două câte două, BC = a, CA = b, AB = c.
a) Să se calculeze SA, SB, SC.
b) Să se calculeze volumul lui SABC.

29. În tetraedrul ABCD, se dă AB = AC = BC = DA = DB = DC = a.
a) Să se afle distanţa DH, DH $\perp$ (ABC), H$\in$(ABC).
b) Dacă M şi N sunt respectiv mijloacele muchiilor BC şi AD, să se determine MN în funcţie de a.

30. Se consideră un tetraedru [VABC] cu următoarele proprietăţi: ABC triunghi echilateral de latură a, (ABC) $\perp$ (VBC). iar planele (VAC) şi (VAB) formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură de 60°. Să se calculeze distanţa de la V la planul (ABC).

31. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari 3a, latura bazei mici a şi muchia laterală 2a. Să se calculeze volumul şi aria trunchiului.

32. Un cub are muchia a. Să se afle distanţa dintre o diagonală a cubului şi diagonala unei feţe laterale cu care nu se intersectează.

33. În tetraedrul SABC în care SA = 2a, SB = SC = $a\sqrt{3}$, AB = AC = a, iar unghiul dreptei SA cu planul (ABC) are măsura de 45°. Să se calculeze aria şi volumul tetraedrului.

34. Aria totală a unui cilindru de rotaţie este 90π cm^2, iar înălţimea de 4 cm. Să se calculeze volumul prismei hexagonale înscrisă în cilindru.

35. Să se afle volumul şi aria corpului obţinut prin rotaţia completă a unei suprafeţe triunghiulare isoscele [ABC] în jurul lui AB, ştiind că AB = AC = 25 şi BC = 30.

36. Unei sfere de rază r i se circumscrie un trunchi de con. Ştiind că raza bazei mici este de patru ori mai mică decât raza bazei mari, să se afle aria totală şi volumul trunchiului de con.

SOLUȚII

1. a) $AD \cap BE = \{F\}$, FD linie mijlocie în ΔBEC, etc.
2. $m(\angle B) < 90°$, $\boldsymbol{P}_{ACE} = 64$.
3. $\frac{7}{25}$.
4. $S_{dr} = 6 \cdot 5^2$ sau $S_{dr} = 150 \cdot 1^2$;
5. a) $\Delta DFC \sim \Delta BFE$, etc;
b) se aplică a.
6. 3,2 cm.
7. $l_3 = \sqrt{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$; $l_4 = \sqrt{2}$, $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; $l_6 = 1$, $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $l_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_8 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
8. 12,5 cm.
9. $d = \frac{7}{3}$ cm.
10. $\boldsymbol{A} = 4$ cm^2.
11. AC = 25 cm.
12. 2a; $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.
13. a) $AB = \sqrt{a^2+b^2}$, $AC = \sqrt{a^2+c^2}$, $BC = \sqrt{b^2+c^2}$;
b) $A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$;
c) $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$.
14. a) 10 cm, 15 cm, 25 cm;
b) 1550 cm^2, 3750 cm^3.
15. 70 g.
16. $\boldsymbol{V} = 2\sqrt{6}$.
17. a) $\boldsymbol{P} = (3+\sqrt{3})$ cm.
18. a) 32 cm;
b) 56 cm^3.
19. a) $\boldsymbol{P} = 3a$;
b) $\boldsymbol{V} = \frac{a^3}{4}$.
20. a) 144 cm^2;
b) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ cm.
21. a) 192 cm^2;
b) $\sqrt{\frac{234}{10}}$ cm.
22. a) $10a^2$;
b) $A'B^2 = 5a^2$; $BE^2 = 2a^2$; $A'E^2 = 3a^2$; se aplică reciproca teoremei lui Pitagora.
23. a) $\frac{8}{3}$ m^3;
b) $4\sqrt{5}$ m^2.
24. a) $18\sqrt{3}$ cm^3;
b) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm.
25. a) $a^2\sqrt{3}$.
b) $\frac{1}{3}$; **c)** $d_1+d_2+d_3+d_4 = h = ct.$
26. a) $3\sqrt{3}$.

b) 27π. **c)** $\frac{7}{19}$.

27. a) 3 cm;

b) $32\sqrt{13}$ cm^2;

c) $\frac{12}{13}$.

28. a) SA = $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$, SB = $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, SC = $\sqrt{\frac{b^2+a^2-c^2}{2}}$;

b) V = $\frac{SA \cdot SB \cdot SC}{6}$, etc.

29. a) DH = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$;

b) MN = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

30. $\frac{3a}{4}$.

31. $\boldsymbol{V}$ = $\frac{13\sqrt{2}}{3}a^3$, $\boldsymbol{A}$ = $a^2(10+8\sqrt{3})$.

32. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

33. $\boldsymbol{A}$ = $a^2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\boldsymbol{V}$ = $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

34. $50\sqrt{3}$ cm^3.

35. $\boldsymbol{V}$ = 4800π, $\boldsymbol{A}$ = 1.320π.

36. $\boldsymbol{A}$ = $\frac{16\pi r^2}{3}$, $\boldsymbol{V}$ = $\frac{26\pi r^3}{9}$.