Rezolvarea problemelor de geometrie plană prin metoda proiecţiei unui punct pe latura unui triunghi , pentru a se putea aplica teoremele lui Pitagora, Catetei şi înălţimii . Exemple .

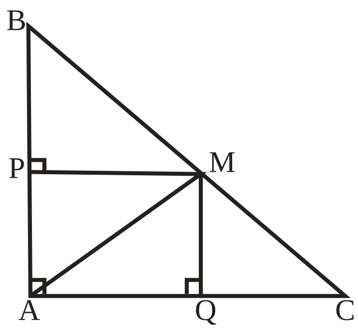
Prof. Bălan Gabriel

1. Dacă M este un punct arbitrar pe ipotenuza BC a triunghiului ABC, are loc relaţia: $AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2 \cdot AM^2$.

Rezolvare

Proiectăm punctul M pe AB şi AC, respectiv în punctul P şi Q;

$$\begin{array}{l} MC^2 = MQ^2 + QC^2 \\ MB^2 = MP^2 + PB^2 \end{array}$$ (1); $MP^2 + MQ^2 = MA^2$ (2);



⊇PMB ~ ⊇ACB ε $\frac{PB}{BA} = \frac{PM}{AC}$ ε

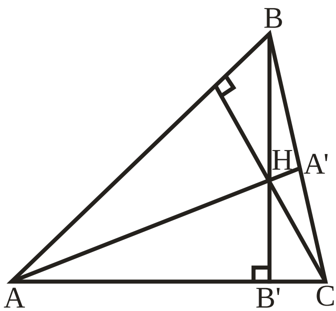
PB = $\frac{AB \cdot PM}{AC}$ (3);

⊇QMC ~ ⊇ABC ε QC = $\frac{AC \cdot QM}{AB}$

.

Înmulţim relaţiile (1) cu AB^2 şi respectiv cu AC^2 şi le adunăm. $MC^2 \cdot AB^2 + MB^2 \cdot AC^2 = MQ^2 \cdot AB^2 + QC^2 \cdot AB^2 + MP^2 \cdot AC^2 + PB^2 \cdot AC^2 = MQ^2 \cdot AB^2 + \frac{AC^2 \cdot QM^2}{AB^2} \cdot AB^2 + MP^2 \cdot AC^2 + \frac{AB^2 \cdot PM^2}{AC^2} \cdot AC^2 = MQ^2 \cdot (AB^2 + AC^2) + MP^2 \cdot (AC^2 + AB^2) = MQ^2 \cdot BC^2 + MP^2 \cdot BC^2 = BC^2 \cdot MA^2$

2. În triunghiul ascuţitunghic ABC, măsura unghiului BAC este de 45^0. Fie H punctul de intersecţie a înălţimilor triunghiului. Să se arate că AH = BC.

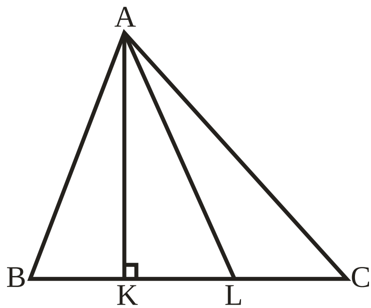


Rezolvare

Considerăm înălţimile AA’ şi BB’, A’ ‽ (BC) şi B’ ‽ (AC); m(¬BAC) = m(¬B’HC) = 45^0 ε ⊒ABB’ isoscel şi AB’ = BB’ şi ⊒CB’H isoscel ε HB’ = B’C; ⊒BB’C η ⊒AB’H (CC) ε AH = BC.

3. Într-un plan se consideră un triunghi ABC şi L un punct pe segmentul (BC). Să se arate că $AL^2 \cdot BC = AB^2 \cdot LC + AC^2 \cdot LB – BL \cdot CL \cdot BC$.

Relaţia lui Stewart



Rezolvare

Coborâm perpendiculara AK pe BC.

În ⊒AKL aplicăm Teorema lui Pitagora: $AL^2 = AK^2 + KL^2$. În ⊒ABK aplicăm Teorema lui Pitagora: $AK^2 = AB^2 – BK^2$ deci $AL^2 = AB^2 – BK^2 + KL^2 = AB^2 – BK^2 + (BL – BK)^2 = AB^2 + BL^2 – 2BK \cdot BL$ (1).

Analog, $AC^2 = AB^2 – 2BK \cdot BC + BC^2$ (2)

Înmulţind pe (1) cu BC şi pe (2) cu BL şi scăzându-le obţinem relaţia cerută.