Prof Șerban Simona Marinela

TESTUL 1

1.(3p) Se dau matricele: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}; a,b,c,d\in R$

a) Să se calculeze: $A^2-2A-5I_2$

b) Să se calculeze: $X^2-(a+d)X+(ad-bc)I_2$

2.(3p) Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

a) Să se determine $\alpha\in R$ astfel încât $A^2=\alpha I_2$

b) Să se determine $n\in N^*$ astfel încât $A+A^2+.....+A^n=11(A-2I_2)$

3.(3p) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Calculaţi A^{2013}.

Obs. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 minute.

TESTUL 2

1.(3p) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(R)$

a) Să se calculeze A^2+A.

b) Să se determine transpusa matricii $B=A+A^2+....+A^{2013}$

2.(3p) Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

G = $\{\,x(a)/a\in R$ şi $x(n)=I_2+aA\}$

a) Să se verifice dacă I_2 aparţine lui G

b) Să se arate că $x(a)\cdot x(b)=x(a+b+5ab), \forall a,b\in R$

3.(3p) Se consideră matricea $A\in M_2(R), A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Să se arate că există $a\in R$ astfel încât $A^2=2A$

b) Să se calculeze $(A-A^t)^{2013}$

Obs. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 minute.

TESTUL 3

1.(3p) Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

a) Să se calculeze A^2-B^2

b) Să se arate că ecuaţia $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluţii în $M_2(Z)$

2.(3p) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. Se notează cu $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi

$A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n.ori}$, oricare ar fi $n\in N^*$.

a) Să se arate că $A^2+A^3=O_2$

b) Să se calculeze suma S = $A+2A^2+\ldots+10A^{10}$

3.(3p) Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

G = $\{x\in M_2(R)/\, x^2=-I_2\}$

a) Să se verifice că $A\in$ G

b) Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}\left(X+I_2\right)\right)^2=\frac{1}{2}X$, oricare ar fi $x\in$ G

c) Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinal al doilea cu elemente numere reale pentru care avem $AX=XA$ este de forma $X=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}; a,b\in R$

Obs. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 minute.

TESTUL 4

1.(3p) Se considera matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Calculaţi $A + A^{t}$;

b) Arătaţi că $A^3-3A^2+3A-I_3=O_3$

2.(3p) Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ si $X(a)=I_2+aA; a\in N^*$

a) Să se calculeze $X(1)+X(2)+\ldots..+X(n)$ si $X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots..\cdot X(n)$ $n\in N^*$;

b) Să se determine $n \in N^*$ pentru care:

$$X(1) + X(2) + ... + X(n) = n \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot .... \cdot X(n)$$

3.(3p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculaţi $A^n, n \in N^*$

TESTUL 5

1.(3p) Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi

$B = I_2 + A$. Se notează $X^n = X \cdot X \cdot \ldots \cdot X$ (luaţi de n ori)

a) Să se verifice că $A^2 = O_2$;

b) Să se determine $x \in R$ pentru care $B^3 - B^2 = XA$

2.(3p) Unui elev i se scrie pe tablă matricea de mai jos

$$A = \begin{pmatrix} -10 & * & -7 \\ * & -2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Profesorul îi cere elevului să înlocuiască asterixurile cu numere întregi astfel încât după completare, sumele tuturor numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană şi cele două diagonale să fie egale.

a) Este posibil acest lucru?

b) În caz afirmativ ce matrice obţine elevul?

3.(3p) Fie matricea $A = (a_{ij})_{1 \le i \le 3; 1 \le j \le 3}$, $A \in M_3(R)$ unde $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, i = j \\ 0, i > j \\ (-1)^{1+j} \cdot C_j^i, i < j \end{cases}$

a) Calculaţi A^2;

b) Calculaţi $A^n, n \in N^*$