Progresii aritmetice și progresii geometrice

Prof. Antonie Cristian Daniel

Progresii aritmetice

Definiţie: Se numeşte **progresie aritmetică** un şir de numere reale a_n în care diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r, numit raţia progresiei aritmetice: $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \geq 1$

Se spune că numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt în progresie aritmetică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Teoremă:şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$

Termenul general al unei progresii aritmetice: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Prop.Numerele a,b,c sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie aritmetică de forma :

$x_1 = u - r$, $x_2 = u$, $x_3 = u + r$; $u, r \in R$.

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie aritmetică astfel:

$x_1 = u - 3r$, $x_2 = u - r$, $x_3 = u + r$, $x_4 = u + 3r$, $u, r \in R$.

Progresii geometrice

Definiţie : Se numeşte **progresie geometrică** un şir de numere reale $b_n, b_1 \neq 0$ în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q, numit raţia progresiei geometrice: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q, q \neq 0$

Se spune că numerele $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sunt în progresie geometrică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Teoremă:şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^{\ 2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2$

Termenul general al unei progresii geometrice: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Prop.: Numerele a,b,c sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, q \neq 1$ sau $S_n = n \cdot b_1$, *dacă* q = 1

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie geometrică de forma :

$x_1 = \frac{u}{q}, x_2 = u, x_3 = u \cdot q, q \neq 0$

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie geometrică de forma:

$x_1 = \frac{u}{q^3}, x_2 = \frac{u}{q}, x_3 = u \cdot q, x_4 = u \cdot q^3, q \neq 0$

Formule utile:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$$