Spaţii Sobolev

1 Definiţia şi proprietăţile spaţiilor Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un deschis şi fie $p \in \mathbf{R}$ cu $1 \leq p \leq \infty$.

Definiţia 1.1. *Spatiul Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *se defineşte prin*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) = \{ \quad & u \in L^p(\Omega) | \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \ \textit{astfel încât} \\ & \textstyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, 2, ...N\}. \end{aligned}$$

Fie $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Pentru $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definim $\dfrac{\partial u}{\partial xi} = g_i$ şi scriem

$$\nabla u = grad\ u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$$

Spaţiul $W^{1,p}(\Omega)$ este înzestrat cu norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

sau uneori cu norma echivalentă

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

daca $1 \leq p < \infty$.// Spatiul $H^1(\Omega)$ este înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

cu norma asociată

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

care este echivalentă cu norma din $W^{1,2}$.

Propoziţia 1.1. *Spaţiul $W^{1,p}(\Omega)$ este un spaţiu Banach pentru $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ este reflexiv pentru $1 < p < \infty$ şi este separabil pentru $1 \leq p < \infty$. Spatiul $H^1(\Omega)$ este un spaţiu Hilbert separabil.*

Demonstraţie.
a) Fie (u_n) un şir Cauchy în $W^{1,p}(\Omega)$; atunci (u_n) şi (∇u_n) sunt şiruri Cauchy în $L^p(\Omega)$. Rezultă că $u_n \to u$ în L^p şi $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to g_i$ în L^p, oricare ar fi $i = 1, 2, ..., N$. Avem

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega -\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, ...N$$

şi prin trecere la limită obţinem

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, ..., N.$$

Deci $u \in W^{1,p}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ oricare ar fi $i = 1, 2, ..., N$ şi $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$.

b) $W^{1,p}(\Omega)$ este reflexiv pentru $1 < p < \infty$.
Într-adevăr, spaţiul produs $E = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ este reflexiv. Operatorul $T : W^{1,p}(\Omega) \to E$ definit prin $Tu = [u, \nabla u]$ este o izometrie de la $W^{1,p}(\Omega)$ în E; deci $T(W^{1,p})$ este un subspaţiu închis al lui E. Rezultă că $T(W^{1,p})$ este reflexiv. În consecinţă, $W^{1,p}(\Omega)$ este de asemenea reflexiv.

c) $W^{1,p}(\Omega)$ este separabil pentru $1 \leq p < \infty$.
Într-adevăr, spaţiul produs $E = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ este separabil. Deci $T(W^{1,p})$ este, de asemenea separabil. În consecinţă, $W^{1,p}(\Omega)$ este separabil.

Teorema 1.1. ***(Friedrichs)*** *Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \leq p < \infty$. Atunci există un şir (u_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât*

$$u_{n|\Omega} \to u \text{ în } L^p(\Omega) \tag{2.1}$$

şi

$$\nabla u_{n|\omega} \to \nabla u|\omega \text{ în } (L^p(\omega))^N \text{ pentru orice } \omega \subset\subset \Omega. \tag{2.2}$$

În demonstraţie vom utiliza :

Lema 1.1. *Fie $\rho \in L^1(\mathbf{R}^N)$ şi $v \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ cu $1 \leq p \leq \infty$. Atunci*

$$\rho * v \in W^{1,p}(R^N) \text{ şi } \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i} \ \forall i = 1, 2, ..., N.$$

Demonstraţie.
Presupunem mai întâi că ρ are suport compact. Ştim că $\rho * v \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Fie $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$. Obţinem

$$\int_{\mathbf{R}^N} (\rho * v)\varphi' = \int_{\mathbf{R}^N} v(\check{\rho} * \varphi') = \int_{\mathbf{R}^N} v(\check{\rho} * \varphi)' = -\int_{\mathbf{R}^N} v'(\check{\rho} * \varphi) = -\int_{\mathbf{R}^N} (\rho * v')\varphi.$$

De aici rezultă că

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \text{ şi } (\rho * v)' = \rho * v'.$$

Dacă ρ nu are suportul compact introducem un şir (ρ_n) din $C_c(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $\rho_n \to \rho$ în $L^1(\mathbf{R}^N)$. Din cele de mai sus rezultă că

$$\rho_n * v \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \text{ şi } (\rho_n * v)' = \rho_n * v'.$$

Dar $\rho_n * v \to \rho * v$ în $L^p(\mathbf{R}^N)$ şi $\rho_n * v' \to \rho * v'$ în $L^p(\mathbf{R}^N)$. Obţinem

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \text{ şi } (\rho * v)' = \rho * v'.$$

DEMONSTRAŢIA TEOREMEI 1.1 Notăm

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in \Omega \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

şi punem $v_n = \rho_n * \overline{u}$ (unde ρ_n este un sir regularizant). Ştim ca $v_n \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ şi $v_n \to \overline{u}$ în $L^p(\mathbf{R}^N)$. Arătăm că $\nabla v_{n|\omega} \to \nabla u|\omega$ in $(L^p(\omega))^N$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$. Într-adevar, fiind dat $\omega \subset\subset \Omega$, fixăm o funcţie $\alpha \in C_c^1(\Omega), 0 \leq \alpha \leq 1$, astfel încât $\alpha = 1$ într-o vecinatate a lui ω. Observăm că pentru n suficient de mare avem

$$\rho_n * (\overline{\alpha u}) = \rho_n * \overline{u} \text{ în } \omega. \tag{2.3}$$

Într-adevar

$$\begin{aligned} Supp(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \overline{u}) = \ & Supp[\rho_n * (1-\overline{\alpha})\overline{u}] \subset Supp\rho_n + Supp(1-\overline{\alpha})\overline{u} \\ & \subset B(0, \tfrac{1}{n}) + Supp(1-\overline{\alpha}) \subset \omega^c \end{aligned}$$

pentru n suficient de mare. De aici rezultă 2.3.
Din lema **1**.1 avem

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) = \rho_n * \left(\overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u} \right).$$

Rezultă că

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u}$$

în $L^p(\mathbf{R}^N)$.
În particular

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

în $L^p(\Omega)$ şi, comform 2.3,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{u}) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

în $L^p(\Omega)$.
În final, se realizează o "troncatură" a şirului v_n. Mai precis, punem $u_n = \xi_n v_n$ unde ξ_n este un şir de troncatură, adică am fixat o funcţie $\xi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ cu $0 \leq \xi \leq 1$ şi

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } |x| \leq 1 \\ 0 \text{ dacă } |x| \geq 2. \end{cases}$$

şi punem $\xi_n(x) = \xi(\frac{x}{n})$, $n = 1, 2, \ldots$. Se verifică usor că şirul (u_n) are proprietăţile dorite, adică $u_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$.

Propoziţia 2.2. *Fie $u \in L^p(\Omega)$ cu $1 < p \leq \infty$. Proprietăţile următoare sunt echivalente:*
(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$,
(ii) există o constantă C astfel încât

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}(\Omega) \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, ...N,$$

(iii) există o constantă C astfel încât pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$ şi orice $h \in \mathbf{R}^N$ cu $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$ avem

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|h|.$$

(În plus se poate lua $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ în (i) şi (ii).)

Remarca 2.1. *Daca $p = 1$ implicaţiile următoare rămân valabile:*

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).$$

Funcţiile care satisfac (ii) (sau (iii)) cu $p = 1$ se numesc ***funcţii cu variaţie mărginită*** *(în limbajul teoriei distribuţiilor, este vorba de funcţii L^1 ale căror derivate de ordinul întâi în sensul distribuţiilor sunt măsuri mărginite). Acest spaţiu joacă un rol* ***mai important*** *decât spaţiul $W^{1,1}$; întâlnim funcţii cu variaţie mărginită(sau de aceeaşi natură) în teoria* ***suprafeţelor minimale****, în probleme de* ***plasticitate*** *(funcţii cu deformaţie mărginită), în ecuaţiile* ***cvasiliniare de ordinul întâi*** *care admit* ***soluţii discontinue*** *sau* ***unde de şoc****.*

Demonstraţie.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Evident.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Funcţionala liniară

$$\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \to \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \forall i = 1, 2, ..., N$$

este definită pe un subspaţiu dens al lui $L^{p'}$ şi este continuă în norma $L^{p'}$. Deci ea se prelungeşte la o funcţională liniară şi continuă F pe $L^{p'}$ (se aplică teorema lui Hahn-Banach). Comform teoremei de reprezentare a lui Riesz există $g \in L^p$ astfel încât

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_\Omega g\varphi \quad \forall \varphi \in L^{p'}.$$

În particular

$$\int_{\Omega} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} g\varphi \quad \forall\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega), \forall i = 1, 2, ...N$$

şi deci $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Începem prin a presupune că $u \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^N)$. Fie $h \in \mathbf{R}^N$ şi definim

$$v(t) = u(x + th), t \in \mathbf{R}.$$

Atunci $v^{'}(t) = h \cdot \nabla u(x + th)$ şi deci

$$u(x + h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v^{'}(t)dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th)dt.$$

Prin urmare

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt$$

şi

$$\begin{aligned} \int_{\omega} |\tau_h u(x) - u(x)|^p dx &\leq |h|^p \int_{\omega} dx \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt \\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_{\omega} |\nabla u(x + th)|^p dx \\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_{\omega+th}^{\omega} |\nabla u(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Fixând $|h| < dist(\omega, \Omega^c)$, există un deschis $\omega^{'} \subset\subset \Omega$ astfel încât $\omega + th \subset \omega^{'}$ pentru orice $t \in [0, 1]$ şi deci

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)}^p \leq |h|^p \int_{\omega^{'}} |\nabla u|^p \tag{2.4}$$

Presupunem acum că $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \leq p < \infty$. Fie (u_n) în $C_c^{\infty}(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$, $\forall\omega \subset\subset \Omega$.

Aplicăm inegalitatea 2.4 lui (u_n) şi, prin trecere la limită, obţinem (iii).

Dacă $p = \infty$ aplicăm cele de mai sus (pentru $p < \infty$) şi apoi facem $p \to \infty$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Fie $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Considerăm un deschis ω astfel încât Supp$\varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$. Fie $h \in \mathbf{R}^N$ cu $|h| < dist(\omega, \partial\Omega^c)$. Din (iii) rezultă că

$$\left|\int_{\Omega} (\tau_h u - u)\varphi\right| \leq C|h|\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Pe de altă parte, din

$$\int_\Omega (u(x+h)-u(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega u(y)(\varphi(y-h)-\varphi(y))dy$$

rezultă că

$$\left|\int_\Omega u(y)\frac{(\varphi(y-h)-\varphi(y))}{|h|}dy\right| \le C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Alegâd $h = te_i, t \in \mathbf{R}$, şi trecând la limită când $t \to 0$ obţinem (ii).

Remarca 2.2. *Propoziţia 2.1 ((i) ⇒ (iii)) arată că dacă $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ şi Ω este un deschis* ***conex****, atunci*

$$|u(x)-u(y)| \le \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} dist_\Omega(x,y) \quad a.p.t. \quad x,y \in \Omega \tag{2.5}$$

unde $dist_\Omega(x,y)$ reprezintă ***distanţa geodezică*** *între x şi y iîn Ω; rezultă de aici că u admite un reprezentant continuu care verifică 2.5 pentru orice $x,y \in \Omega$. Deducem că dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \le p \le \infty$, Ω este un deschis oarecare şi $\nabla u = 0$ a.p.t. în Ω, atunci u este constantă pe fiecare componentă conexă a lui Ω.*
Observăm în sfârşit că dacă $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, unde Ω este un deschis ***convex****, atunci*

$$|u(x)-u(y)| \le \|\nabla u\|_{L^\infty}|x-y| \quad \forall x,y \in \Omega$$

Propoziţia 2.3. ***(Derivarea unui produs).***
Fie $u,v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ cu $1 \le p \le \infty$. Atunci $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ şi

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,...N.$$

Demonstraţie.
Putem întotdeauna să ne situăm în cazul $1 \le p < \infty$.
Comform teoremei 2.1 există şirurile (u_n), (v_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ aftfel încât

$$u_n \to u, \quad v_n \to v \text{ în } L^p(\Omega) \text{ şi a.p.t în } \Omega,$$

$$\nabla u_n \to \nabla u, \quad \nabla v_n \to \nabla v \text{ în } (L^p(\omega))^N \text{ pentru orice } \omega \subset\subset \Omega.$$

Reluând demomstraţia teoremei 2.1, observăm cu uşurinţă că avem, în plus,

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ şi } \|v_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \le \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Pe de altă parte,

$$\int_\Omega u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Trecând la limită, folosind teorema convergenţei dominante, avem

$$\int_\Omega u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Propoziţia 2.4. ***(Derivarea unei compuneri de funcţii).***
Fie $G \in C^1(\mathbf{R})$ *astfel încât* $G(0) = 0$ *şi* $|G'(s)| \leq M \; \forall s \in \mathbf{R}$. *Fie* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *cu* $1 \leq p \leq \infty$, *atunci*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Demonstraţie.
Avem $|G(s)| \leq M|s| \; \forall s \in \mathbf{R}$ şi deci $|G \circ u| \leq M|u|$; prin urmare $G \circ u \in L^p(\Omega)$ şi, de asemenea,

$$(G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega).$$

Rămâne de verificat că

$$\int_\Omega (G \circ u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Dacă $1 \leq p < \infty$, alegem un şir (u_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi a.p.t. în Ω, $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$ (teorema 2.1).
Avem

$$\int_\Omega (G \circ u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (G' \circ u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Dar $G \circ u_n \to G \circ u$ în $L^p(\Omega)$ şi $(G' \circ u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$ în $L^p(\omega)$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$ (prin convergenţa dominantă). De aici rezultă 2.6.

Dacă $p = \infty$, fixăm un deschis Ω' astfel încât $\mathrm{Supp}\varphi \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Atunci $u \in W^{1,p}(\Omega') \; \forall p < \infty$ şi 2.6 rezultă din cele de mai sus.

Propoziţia 2.5. ***(Formula de schimbare de variabilă).***
Fie Ω *si* Ω' *două mulţimi deschise în* $\mathbf{R}^N$ *şi* $H : \Omega' \to \Omega$ *o aplicaţie bijectivă,* $x = H(y)$, *astfel încât*

$$H \in C^1(\Omega'), \quad H^{-1} \in C^1(\Omega), \quad JacH \in L^\infty(\Omega'), \quad JacH^{-1} \in L^\infty(\Omega)$$

unde Jac H reprezintă matricea Jacobiană $\frac{\partial H_i}{\partial y_j}$.
Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *cu* $1 \leq p \leq \infty$, *atunci* $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega^{'})$ *şi*

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \quad \forall j = 1, 2, ..., N.$$

Demonstraţie.
Dacă $1 \leq p < \infty$, alegem un şir $(u)_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$. Deci $u_n \circ H \to u \circ H$ în $L^p(\Omega^{'})$ şi

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H\right)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \to \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ H\right)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \text{ în } L^p(\omega^{'}) \quad \forall \omega^{'} \subset\subset \Omega^{'}.$$

Fiind dată $\psi \in C_c^1(\Omega^{'})$ avem

$$\int_{\Omega'}(u_n \circ H)\frac{\partial \psi}{\partial y_j}dy = -\int_{\Omega'}\sum_i \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H\right)\frac{\partial H_i}{\partial y_j}\psi dy.$$

Prin trecere la limită obţinem rezultatul dorit .

Dacă $p = \infty$, se procedează ca la sfârşitul demonstraţiei propoziţiei 2.3.

2.2 Spaţiile $W^{m,p}(\Omega)$

Fie $m \geq 2$ un întreg şi p un număr real cu $1 \leq p \leq \infty$. Definim prin recureţă

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., N\}.$$

Alternativ, aceste spaţii pot fi introduse prin

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | \forall \alpha \quad \text{cu} \quad |\alpha| \leq m, \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ astfel încât } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}.$$

Notăm $D^\alpha u = g_\alpha$. Spaţiul $W^{m,p}(\Omega)$ înzestrat cu norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

este un spaţiu Banach.

Punem $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

este un spaţiu Hilbert.

Remarca 2.3. *Se demonstrează că dacă Ω este "suficient de neted" cu $\Gamma = \partial\Omega$ mărginită, atunci norma lui $W^{m,p}(\Omega)$ este echivalentă cu norma*

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Mai precis, se arată că pentru orice multi-indice α cu $0 < |\alpha| < m$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există o constantă C (depinzând de Ω, ε, α) astfel încât

$$\|D^\alpha u\|_{L^p} \le \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$