Ecuații reductibile la ecuații de gradul I

Prof. Mihai Cristina
Liceul Tehnologic "Petrache Poenaru", Bălcești, Vâlcea

Rezolvarea unor ecuații scrise sub formă de **produs** în care fiecare factor este de gradul I de forma: $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$. Se știe că un produs este egal cu 0 dacă unul din factori este egal cu 0. Cum în acest produs sunt *n* factori, înseamnă că vom avea de rezolvat *n* ecuații de gradul I. Soluția ecuației scrisă sub formă de produs va fi reuniunea soluțiilor găsite la rezolvarea fiecărei soluții parțiale.

$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$

$f_1(x) = 0$ cu mulțimea de soluții S_1

$f_2(x) = 0$ cu mulțimea de soluții S_2

………………………………………

$f_n(x) = 0$ cu mulțimea de soluții S_n

Mulțimea soluțiilor ecuației produs $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ este $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$.

Exemple:

Să se rezolve ecuațiile:

a) $(2 \cdot x - 1) \cdot (x + 3) = 0$

Cum în produs sunt doi factori de gradul I, vom avea de rezolvat două ecuații:

$$2 \cdot x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x = 1 \,|:2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$S_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$S_2 = \{-3\}$$

Prin urmare, soluția ecuației produs inițiale este $S = S_1 \cup S_2 = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$.

b) $(-5 \cdot x + 10) \cdot (2 - 3 \cdot x) = 0$

Cum în produs sunt doi factori de gradul I, vom avea de rezolvat două ecuații:

$$-5\cdot x+10=0 \Leftrightarrow -5\cdot x=-10\,\big|\cdot(-1) \Leftrightarrow 5\cdot x=10\,\big|:5 \Leftrightarrow x=\frac{10}{5} \Leftrightarrow x=2$$

$$S_1=\{2\}$$

$$2-3\cdot x=0 \Leftrightarrow -3\cdot x=-2\,\big|\cdot(-1) \Leftrightarrow 3\cdot x=2\,\big|:3 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$S_2=\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

Prin urmare, soluția ecuației produs inițiale este $S=S_1\cup S_2=\left\{\frac{2}{3},2\right\}$.

c) $(3\cdot x-6)\cdot(-3+x)\cdot(4\cdot x-7)=0$

Cum în produs sunt trei factori de gradul I, vom avea de rezolvat trei ecuații:

$$3\cdot x-6=0 \Leftrightarrow 3\cdot x=6\,\big|:3 \Leftrightarrow x=\frac{6}{3} \Leftrightarrow x=2$$

$$S_1=\{2\}$$

$$-3+x=0 \Leftrightarrow x=3$$

$$S_2=\{3\}$$

$$4\cdot x-7=0 \Leftrightarrow 4\cdot x=7\,\big|:4 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$$

$$S_3=\left\{\frac{7}{4}\right\}$$

Prin urmare, soluția ecuației produs inițiale este $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{2,3,\frac{7}{4}\right\}$.

d) $(8-4\cdot x)\cdot(x-3)\cdot(x+2)=0$

Cum în produs sunt trei factori de gradul I, vom avea de rezolvat trei ecuații:

$$8-4\cdot x=0 \Leftrightarrow -4\cdot x=-8\,\big|\cdot(-1) \Leftrightarrow 4\cdot x=8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{4} \Leftrightarrow x=2$$

$$S_1=\{2\}$$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

$$S_2=\{3\}$$

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$S_3=\{-2\}$$

Prin urmare, soluția ecuației produs inițiale este $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{-2,2,3\}$

e) $(x-3)^2=16$

Când în membrul drept al ecuației nu apare 0, mutăm toți termenii în membrul stâng al ecuației și descompunem în factori.

$$(x-3)^2-16=0$$

În acest caz descompunerea o vom face folosind formula de calcul prescurtat $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$.

Ecuația devine echivalentă cu:

$$(x-3)^2-4^2=0 \Leftrightarrow (x-3-4)\cdot(x-3+4)=0 \Leftrightarrow (x-7)\cdot(x+1)=0$$

Cum în produs sunt doi factori de gradul I, vom avea de rezolvat două ecuații:

$x-7=0 \Leftrightarrow x=7$

$$S_1=\{7\}$$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$$S_2=\{-1\}$$

Prin urmare, soluția ecuației produs inițiale este $S=S_1\cup S_2=\{-1,7\}$.

Alte tipuri de ecuații sunt cele sub formă de fracție, numite **ecuații fracționare**. O ecuație fracționară este o ecuație în care necunoscuta figurează la numitorul uneia sau mai multor fracții.

Exemple de ecuații fracționare:

$$\frac{x}{x-1}+2=0;\ \frac{x-3}{x}+\frac{1}{x-1}=0;\ \frac{3-x}{x+2}=3-\frac{1}{x}.$$

Pentru a rezolva o ecuație fracționară se parcurg următoarele **etape**:

1) se trec condițiile de existență ale numitorilor care conțin necunoscuta și anume să fie nenuli; se obține astfel mulțimea de definiție a ecuației pe care o vom nota cu D (de la domeniul de definiție);

2) se aduc fracțiile la același numitor;

3) se rezolvă ecuația astfel obținută;

4) se determină mulțimea soluțiilor ecuației verificând care din valorile găsite se află în domeniul de definiție D (aflat în prima etapă).

<u>Exemple:</u>

Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{x}{x-1}-\frac{x+2}{x-3}=0$

Trecem condițiile de existență ale fracțiilor care conțin necunoscuta la numitor:

$x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

$x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$

Domeniul de definiție al ecuației este D = $\Re\setminus\{1,3\}$.

Aducem la același numitor; numitorul comun este: $(x-1)\cdot(x-3)$

$$^{x-3)}\frac{x}{x-1}-{}^{x-1)}\frac{x+2}{x-3}=0 \iff \frac{x\cdot(x-3)-(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x-3)}=0$$

Prin desfacerea parantezelor de la numărător și efectuarea calculelor obținem:

$$\frac{x^2-3\cdot x-x^2-2\cdot x+x+2}{(x-1)\cdot(x-3)}=0 \iff \frac{-4\cdot x+2}{(x-1)\cdot(x-3)}=0$$

Deoarece numitorul este nenul și știind că o fracție se anulează dacă se anulează numărătorul avem:

$$-4\cdot x+2=0 \iff -4\cdot x=-2\,|\cdot(-1) \iff 4\cdot x=2 \iff x=\frac{2}{4} \iff x=\frac{1}{2}$$

Valoarea obținută $x=\frac{1}{2}$ o verificăm dacă face parte din domeniul de definiție al ecuației D. Se observă că valoarea găsită pentru x aparține mulțimii D și putem scrie mulțimea soluțiilor ecuației: $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) $\frac{4}{x-1}+\frac{5}{x+1}=\frac{4\cdot(x-3)}{x^2-1}$

Trecem condițiile de existență ale fracțiilor care conțin necunoscuta la numitor:

$x-1\neq 0 \iff x\neq 1$

$x+1\neq 0 \iff x\neq -1$

$x^2-1\neq 0 \iff (x-1)\cdot(x+1)\neq 0 \iff x\neq \pm 1$

Domeniul de definiție al ecuației este D = $\Re\setminus\{-1,1\}$.

Aducem la același numitor; numitorul comun este: x^2-1

$$^{x+1)}\frac{4}{x-1}+{}^{x-1)}\frac{5}{x+1}=\frac{4\cdot(x-3)}{x^2-1}$$

Prin desfacerea parantezelor de la numărător și efectuarea calculelor obținem:

$$\frac{4\cdot(x+1)+5\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{4\cdot(x-3)}{x^2-1} \iff \frac{4\cdot x+4+5\cdot x-5}{x^2-1}=\frac{4\cdot x-12}{x^2-1} \iff$$

$$\iff \frac{9\cdot x-1}{x^2-1}=\frac{4\cdot x-12}{x^2-1}$$

Având egalitatea a două fracții care au același numitor, se poate renunța la numitor și obținem:

$$9\cdot x-1=4\cdot x-12 \iff 9\cdot x-4\cdot x=-12+1 \iff 5\cdot x=-11 \iff x=-\frac{11}{5}$$

Valoarea obținută $x = -\frac{11}{5}$ o verificăm dacă face parte din domeniul de definiție al ecuației D. Se observă că valoarea găsită pentru *x* aparține mulțimii D și putem scrie mulțimea soluțiilor ecuației: $S = \left\{-\frac{11}{5}\right\}$.

c) $\frac{2 \cdot x - 3}{x^2 - 9} + \frac{1}{x - 3} = \frac{5}{x + 3}$

Trecem condițiile de existență ale fracțiilor care conțin necunoscuta la numitor:

$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

sau $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

Condițiile de existență pentru ceilalți numitori se regăsesc în condițiile anterioare (deoarece sunt factori în descompunerea lui $x^2 - 9$).

Domeniul de definiție al ecuației este D = $\Re \setminus \{-3{,}3\}$.

Aducem la același numitor; numitorul comun este: $x^2 - 9$

$$\frac{2 \cdot x - 3}{x^2 - 9} + {}^{x+3)}\frac{1}{x - 3} = {}^{x-3)}\frac{5}{x + 3}$$

Desfacem parantezele de la numărător și efectuăm calculele astfel:

$$\frac{2 \cdot x - 3 + (x+3)}{x^2 - 9} = \frac{5 \cdot (x-3)}{x^2 - 9} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot x - 3 + x + 3}{x^2 - 9} = \frac{5 \cdot x - 15}{x^2 - 9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot x}{x^2 - 9} = \frac{5 \cdot x - 15}{x^2 - 9}$$

Prin renunțarea la numitorul comun avem:

$$3 \cdot x = 5 \cdot x - 15 \Leftrightarrow 3 \cdot x - 5 \cdot x = -15 \Leftrightarrow -2 \cdot x = -15 \,|\cdot(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$$

Valoarea obținută $x = \frac{15}{2}$ o verificăm dacă face parte din domeniul de definiție al ecuației D. Se observă că valoarea găsită pentru *x* aparține mulțimii D și putem scrie mulțimea soluțiilor ecuației: $S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$.

d) $\frac{x + 3}{x - 2} - \frac{4}{5} = \frac{x + 4}{5 \cdot x - 1}$

Trecem condițiile de existență ale fracțiilor care conțin necunoscuta la numitor:

$x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

$5\cdot x-1\neq 0 \Leftrightarrow 5\cdot x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \frac{1}{5}$

Domeniul de definiție al ecuației este D = $\Re \setminus \left\{\frac{1}{5}, 2\right\}$.

Numitorul comun este: $5\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x-1)$ și amplificăm fiecare fracție corespunzător:

$$^{5\cdot(5\cdot x-1))}\frac{x+3}{x-2} - {}^{(x-2)\cdot(5\cdot x-1))}\frac{4}{5} = {}^{5\cdot(x-2))}\frac{x+4}{5\cdot x-1}$$

Prin desfacerea parantezelor și efectuarea calculelor avem:

$$\frac{5\cdot(5\cdot x-1)\cdot(x+3)-4\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x-1)}{5\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x-1)} = \frac{5\cdot(x-2)\cdot(x+4)}{5\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(25\cdot x-5)\cdot(x+3)-(4\cdot x-8)\cdot(5\cdot x-1)}{5\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x-1)} = \frac{(5\cdot x-10)\cdot(x+4)}{5\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25\cdot x^2+75\cdot x-5\cdot x-15-20\cdot x^2+4\cdot x+40\cdot x-8}{5\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x-1)} =$$

$$= \frac{5\cdot x^2+20\cdot x-10\cdot x-40}{5\cdot(x-2)\cdot(5\cdot x-1)}$$

Prin renunțarea la numitor obținem ecuația:

$$5\cdot x^2+114\cdot x-23 = 5\cdot x^2+10\cdot x-40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\cdot x^2+114\cdot x-5\cdot x^2-10\cdot x = -40+23 \Leftrightarrow 104\cdot x = -17 \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{17}{104}$$

Valoarea obținută $x = -\frac{17}{104}$ o verificăm dacă face parte din domeniul de definiție al ecuației D. Se observă că valoarea găsită pentru x aparține mulțimii D și putem scrie mulțimea soluțiilor ecuației: $S = \left\{-\frac{17}{104}\right\}$

.